NOMBRE DEL EXPERIMENTO:
“La Geometría Fascinante del Panal de Miel”.

AUTORES:
Federico Muñiz Alonso (fedeymarisa@hotmail.com) y Carlos Espinosa Sánchez (carlos0076@hotmail.com). Profesores de Matemáticas del I.E.S. “Arcipreste de Hita”, Azuqueca, Guadalajara.

CATEGORÍA:
Laboratorio de Matemáticas.

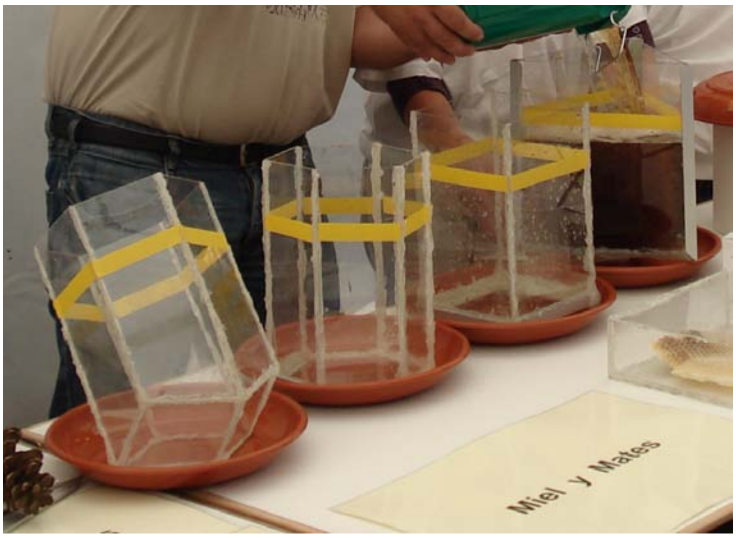
PALABRAS CLAVE:
Minimización. Polígonos.

¿QUÉ SE PRETENDE MOSTRAR?
El diseño del panal de abejas natural es la forma óptima de almacenar miel con el mínimo consumo de cera.

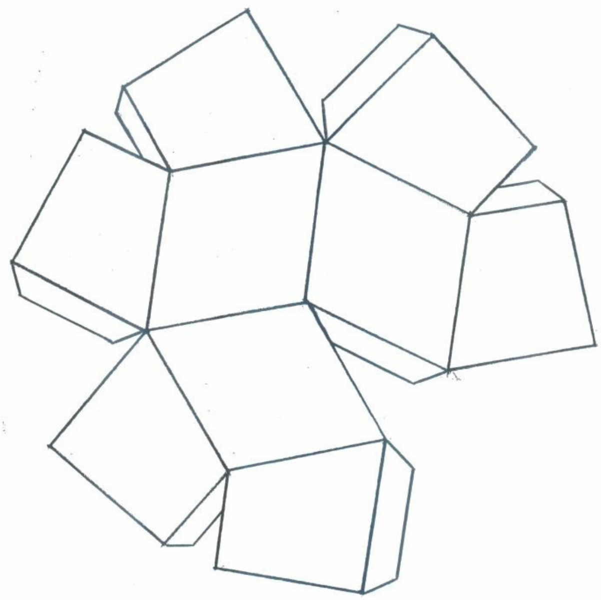
DIRIGIDO A:
Gran Público, Primaria, Secundaria y Universidad.

MATERIALES NECESARIOS:
Cartulinas amarillas, celdas patrón (se adjuntan), pegamento, planchas de plástico de 3-4 mm de espesor, silicona, varios litros de té líquido. Panales de miel naturales (sirven fragmentos).

DESCRIPCIÓN:
Comenzamos construyendo en plástico cuatro modelos diferentes de celdas capaces de formar mosaico. Las tres primeras son prismas rectos regulares de bases triangular, cuadrada y hexagonal. La cuarta es una variación de la hexagonal, cambiando su base por un fondo quebrado a tres aguas, formado por tres rombos iguales.



Las cuatro deben contener el mismo volumen de líquido. Para ello, el triángulo, el cuadrado y el hexágono tendrán igual superficie, y las caras laterales la misma altura.
Como se ha dicho, la cuarta celda es una variación de la hexagonal. Las caras laterales se transforman en trapecios alargados, cuya base mayor debe coincidir con la altura de las otras tres celdas. Teniendo eso en cuenta, y tomando como referencia el modelo de celda de panal que se adjunta, se pueden trazar los tres rombos que compondrán la base quebrada y los ángulos que formarán las caras laterales en sus aristas comunes con el fondo.



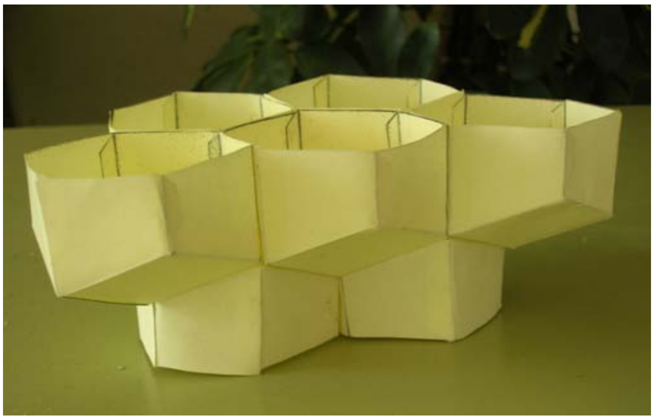
Sugerencias para construir las celdas con alumnos.
Es aconsejable utilizar el Taller de Tecnología. Cada celda puede hacerla un grupo de 4-5 personas. Se agiliza el trabajo si el profesor confecciona en cartulina los patrones para todas las caras y los distribuye a los grupos. **Consejo:** calcular las dimensiones de las celdas para que contengan un volumen aproximado de 5 litros.
Las caras se rotulan sobre las planchas de plástico y **se cortan con sierra de arco**. Es muy conveniente ayudarse de un banco de mesa para fijar las planchas al serrar. Al pulir las irregularidades debe procurarse no alterar las siluetas.
Para unir las caras por las aristas puede usarse silicona, pero se pierde mucha solidez en la construcción. Es preferible emplear **pegamento termofusible que se aplica con pistola.** Una vez unidas las aristas, se van rellenando las celdas con agua para detectar fugas y poros, que pueden cubrirse con silicona.

Ahora ya puede mostrarse al público que tienen la misma capacidad.

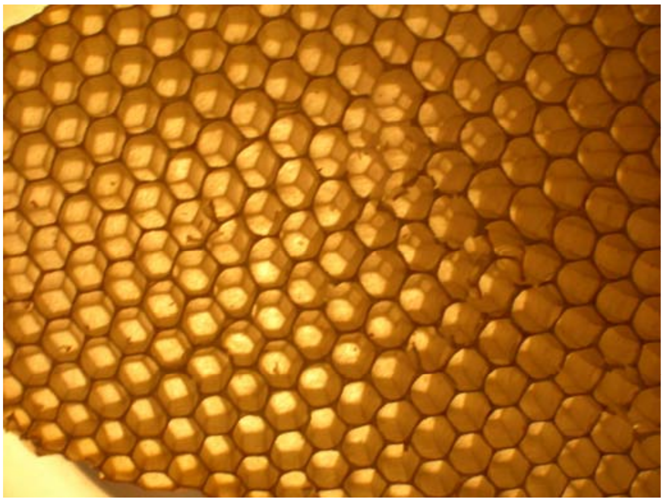
El té tiene un color similar a la miel. Su uso hace la demostración más atractiva que con agua. Rellenamos la celda de base triangular hasta un nivel determinado y marcado. Trasvasamos el líquido a la celda de base cuadrada y comprobamos que llega al mismo nivel. Lo mismo ocurre con las otras dos celdas (por cierto: hay que sujetar la de fondo quebrado durante el llenado). Conviene fijar el nivel de llenado unos cms. por debajo del borde superior, y marcarlo con una tira visible de cinta aislante.

Las cuatro pueden formar mosaicos. Las cuatro almacenan la misma cantidad de miel. ¿Cuál es la óptima? La que tenga menor superficie. Por simple comparación se evidencia que en la celda más compleja las caras laterales presentan un área menor que en el resto.

Paralelamente, habremos construido un mosaico de dos caras utilizando las celdas pequeñas hechas en cartulina de acuerdo al modelo suministrado. Viéndolo, se pone de manifiesto que cada pared pertenece a dos caras. Incluso **el fondo es compartido**. Tres celdas de una cara unidas componen el suelo de una celda de la cara contraria.



La demostración conjunta es muy vistosa, y se redondea mostrando los panales de miel naturales, que aparecen al trasluz como dos mosaicos hexagonales imbricados, dejando ver los fondos quebrados de las celdillas.



RIESGOS:
Aparecen resaltados en rojo en el texto anterior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:
"Nociones de Analítica y Cálculo", de D. Pedro Puig Adam, perteneciente a la colección "Biblioteca Matemática Rey Pastor – Puig Adam", editado en 1941.

PARA SABER MÁS:
La experiencia anterior se dirige al gran público y la desarrollan alumnos de primer ciclo de ESO, que utilizan por tanto niveles elementales de geometría. Pero este tema admite una hermosa profundización cuando buscamos qué ángulo de inclinación de los rombos del suelo quebrado minimiza la superficie de la celda, planteando la cuestión como un problema de máximos y mínimos locales de funciones. Lo adjuntamos a continuación.

Cuando contemplamos un panal de abejas, aparece ante nosotros una multitud de hexágonos ordenados y apretujados en una forma que nos resulta familiar a fuerza de verla repetida en estampados, tarros de miel o mallas metálicas, por citar sólo algunos ejemplos cotidianos.

¿Por qué esa forma?

Como veremos a continuación, ese modo peculiar que tienen las abejas de construir sus panales no se debe a la casualidad. Muy al contrario, representa la manera más eficaz de ahorrar cera sin perder capacidad de almacenamiento.

Para empezar, la disposición en mosaico permite que cada pared pertenezca a dos celdas. ¿Y qué polígonos regulares pueden formar mosaico? Pues el triángulo, el cuadrado y el hexágono.

Si consideramos inicialmente que las celdillas son prismas rectos, y pensamos en un triángulo, un cuadrado y un hexágono que tengan la misma superficie, habrá que buscar el que tenga menor perímetro para que así la longitud y superficie de las paredes que se levanten sobre él también sea la menor posible.

Pues bien: si las áreas son iguales, el menor perímetro corresponde al hexágono. ¡He ahí la causa de esa forma hexagonal! (Por cierto, existen mosaicos cuyo entramado está compuesto por polígonos irregulares. Lo que sucede es que de todos los polígonos con el mismo número de lados y la misma área, el que tiene menor perímetro es el regular)

Pero las abejas todavía han llegado más lejos en su intento de ahorrar cera en la construcción de su panal. Han conseguido minimizar la superficie modificando el fondo de la celda con un refinamiento sorprendente.

¿Cómo?

Partamos del suelo hexagonal plano de una celda cualquiera y dividámoslo en tres rombos como muestran las líneas continuas de la figura 1:

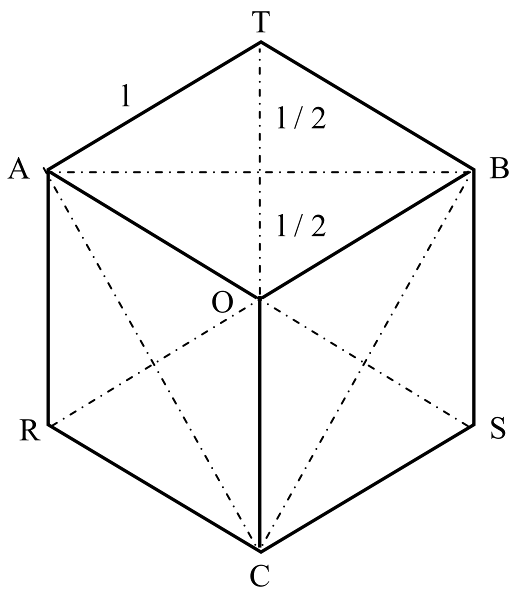
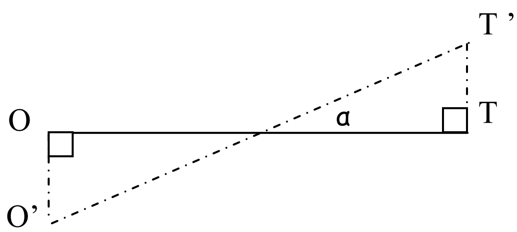


Figura 1

Consideremos uno de esos tres rombos. Su superficie será el doble del área de un triángulo equilátero de lado **l**, esto es: $S = \dfrac{\sqrt{3} \cdot l^2}{2}$

Imaginemos ahora que los tres rombos de la figura 1 rotan ligeramente entorno a los ejes AB, AC y BC, hundiendo el centro O y dilatando las diagonales $\overline{OT}, \overline{OR}\ y\ \overline{OS}$.

Ese pequeño giro comporta un aumento en la superficie de cada rombo. Valoremos ese aumento para un ángulo de giro α.



$$\overline{O'T'} = \frac{OT}{\cos\alpha}$$

Figura 2

$$S_{inicial} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OT}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{2} \qquad S_{final} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{O'T'}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OT}}{2} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{2\cos\alpha}$$

Con lo que el incremento de cada superficie será:

$$\Delta S = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot l^2}{2} \cdot [\sec \alpha - 1]$$

Ahora bien, esta rotación no altera el volumen total de la celda, pero sí modifica sustancialmente la forma y superficie de las caras laterales.

¿De qué manera?

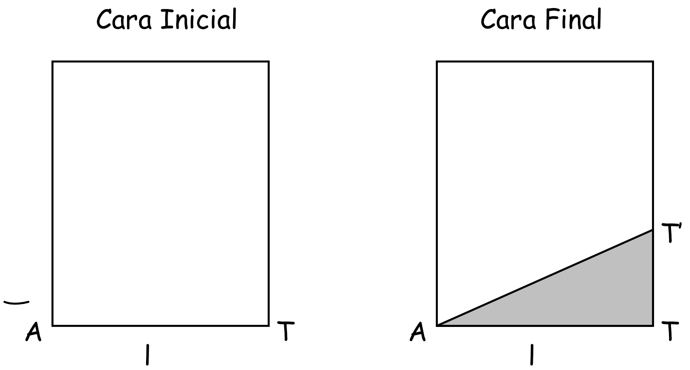


Figura 3

$$\overline{TT'} = \frac{l}{2} tg \alpha \qquad \text{(véase fig. 2)}$$

Vemos entonces que cada giro comporta una disminución en las caras laterales equivalente a las superficies de dos triángulos rectángulos como el sombreado, que será:

$$2 \cdot \frac{l \cdot \frac{l}{2} \cdot tg \alpha}{2} = \frac{l^2 \cdot tg \alpha}{2}$$

Esa disminución supera el incremento del área del rombo y provoca a su vez una disminución en la superficie total de la celda que valdrá:

$$A(\alpha) = 3 \cdot [\frac{l^2 \cdot tg \alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} l^2 \cdot (\sec \alpha - 1)] = \frac{3l^2}{2} \cdot (tg \alpha - \sqrt{3} \sec \alpha + \sqrt{3})$$

Podemos preguntarnos qué valor de α maximizará A(α), haciendo que la celda tenga una superficie total mínima.

$$A'(\alpha) = 0 \Rightarrow \sec^2 \alpha - \sqrt{3} \cdot sen \alpha \cdot \sec^2 \alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sec^2 \alpha = 0 \\ 1 = \sqrt{3} \cdot sen \alpha \Rightarrow sen \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

La primera igualdad no conduce a solución alguna, pero la segunda nos da un valor:

$$sen \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 35^\circ \; 15' \; 51{,}8''$$

En la práctica, las celdas de un panal típico son minúsculas. Se aprecia bien la forma del fondo, pero es muy difícil medir directamente esa inclinación. Lo que sí puede hacerse es calcular y medir los ángulos y segmentos del rombo, que quedarán:

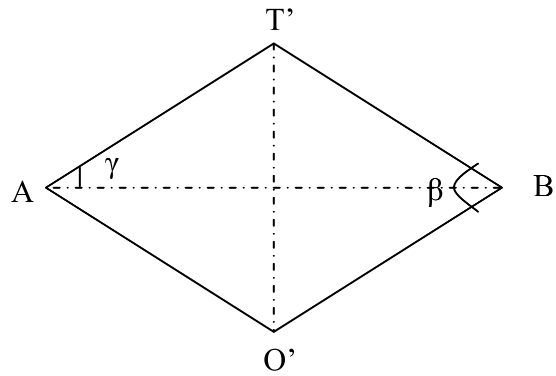


Figura 4

$$\overline{AB} = \sqrt{3} \cdot l \qquad sen\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{O'T'} = \frac{OT}{\cos\alpha} = \frac{l}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot l$$

$$tg\,\gamma = \frac{\overline{O'T'}/2}{\overline{AB}/2} = \frac{\sqrt{3}/\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad ¡¡\gamma = 35^\circ\ 15'\ 51{,}8'' = \alpha!!$$

$$\beta = 2\gamma = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6''$$

Por lo que respecta a las caras laterales:

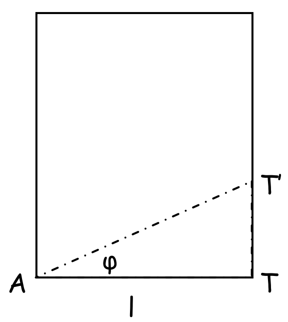


Figura 5

$$tg\,\varphi = \frac{\overline{TT'}}{\overline{AT}} = \frac{\frac{l}{2} \cdot tg\,\alpha}{l} = \frac{tg\,\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \quad \varphi = 19^\circ\ 28'\ 16{,}4''$$

$$\vartheta = 90^\circ - \varphi = 70^\circ\ 31'\ 43{,}6'' \ \Rightarrow \quad ¡¡\ \vartheta = \beta\ !!$$

Por extraordinario que parezca, la eficiencia de este diseño no acaba aquí.

Una vez que las celdas se disponen en mosaico, las oquedades del relieve formado permiten albergar exactamente la misma disposición de celdas en oposición, de forma que cada uno de los rombos se aprovecha para formar el fondo de dos celdillas. Los centros de los fondos de las celdillas de una cara son vértices en los fondos de las celdillas de la cara opuesta.

Cuando se contempla un panal al trasluz, las dos caras se superponen e imbrican ofreciendo una imagen muy hermosa, de gran pureza geométrica.

Las abejas han alcanzado una enorme precisión en la construcción de sus panales, ajustando los ángulos reales a los teóricos con una precisión de pocos minutos de arco.

En tanto en cuanto consiguen minimizar la producción de cera, ahorran energía y aumentan sus probabilidades de supervivencia en épocas de carestía de alimento. Otras abejas no tan eficientes en el diseño del panal se habrán ido extinguiendo, y tras miles y miles de años se han seleccionado sólo aquéllas que genéticamente tiendan a utilizar esta técnica. Actualmente contemplamos el resultado de ese proceso de selección natural.

Este problema aparece tratado y resuelto en el libro "Nociones de Analítica y Cálculo", de D. Pedro Puig Adam, perteneciente a la colección "Biblioteca Matemática Rey Pastor – Puig Adam", editado en 1941. Esa colección es un compendio magnífico de obras donde la matemática se presenta de una manera muy clara, sencilla y atractiva, apoyada por ejemplos tan sugerentes y hermosos como el que acabamos de tratar, y todo ello sin renunciar al rigor ni a la profundidad formal que requieren estos niveles.

Deseamos que estas hojas sirvan de modesto homenaje a este maestro y profesor, y a su manera comprometida de entender la educación.

OBSERVACIONES y SUGERENCIAS:

La plantilla para confeccionar las celdas que se adjunta al principio sigue con bastante fidelidad los valores de los ángulos obtenidos aquí.

Un panal manipulado por muchas personas se deteriora con rapidez. Sugerimos exponerlo en una caja de plástico construida a tal efecto.

Esta experiencia supone una buena ocasión para mostrar al mismo tiempo otros ejemplos explícitos de la matemática en la naturaleza, ofreciendo una visión interdisciplinar, contextualizada y divulgativa de nuestra materia.